Generalized Sierpinski functions, fragmentable compact spaces and differentiability of convex functions (Nonlinear Analysis and Convex Analysis)

数理解析研究所講究録 1298 巻 2002 年 35-46

Generalized Sierpinski functions, fragmentable compact spaces and differentiability of convex functions

静岡大学　理　松田　稔 (Minoru Matsuda)
Faculty of Science, Shizuoka University

1　序

この報告は主に、fragmented 集合 (例えば、[11], [3] を参照)、あるいは generalized fragmented 集合 (例えば、[6], [7], [9] を参照) の一般化概念として我々により考察された fragmentable なコンパクトハウスドルフ位相空間 (fragmentable compact space) について、我々の論文 [8], [10] で得られた結果のうち、特に凸解析的性質に関する部分を纏め、紹介することを目的として構成されたものである。通常 (例えば、[11], [3] 等において) 定義され、様々な考察がなされている位相空間における"Fragmentability"の概念と比較した時、我々の概念は、それより少しく弱い条件を有したものであることを注意しておく。さらに、この分野での一般的概念として代表的である Radon-Nikodym compact space (例えば、[13], [11] を参照) の一般化概念でもあることを、特に注意したい。fragmented 集合、generalized fragemented 集合、あるいはその一般化概念としての fragmentable なコンパクト空間は、実バナッハ空間の共役空間におけるラドン·ニコディム性 (RNP, あるいは、それと同値な性質) にその源を持つ概念であり、それらの構造を解析することは、共役空間における RNP に関する一般化理論に少なからず寄与する意味からも重要と考える。

さて、用語や、記法を固定しながら、考察の概略を述べよう。X を実バナッハ空間、その位相的共役を X^* とし、$B(X)$ は X の閉単位球とする。A は X の有界集合、K は X^* の 弱*コンパクト集合を表す時、このような pair (A,K) について、前述の一連の論文の中で我々は、 K の fragmentedness の一般化としての K の A-fragmentedness を定義し、特徴的な K-値弱*可測関数の構成及びその効果的利用により、この概念の考察を行った。ここでは、このような概念や、それに関する問題を、より一般的な設定で扱うこととする。その際、我々の前述の手法 (関数の構成と、その解析) が利用でき、そのことが、この概念の直接的考察を可能とするのである。我々の設定を述

べよう。 Y はコンパクトハウスドルフ空間とし、$C(Y)$ は Y 上で定義された実数値連続関数全体に一様ノルムを導入した (通常の) バナッハ空間とし、H は $C(Y)$ の有界部分集合 とする。今後断らない限り、H はそのような集合を表す。各 $y \in Y$ に対して、$\delta(y)$ は、y でのディラック測度を表し、$\delta(Y) = \{\delta(y) : y \in Y\}$ とする。そのとき、$\delta(Y)$ は $C(Y)^*$ (: $C(Y)$ の位相的共役) の弱*コンパクト部分集合であり、$M_1^+(Y)$ (: the set of all Radon probability measures on Y) $= \overline{\mathrm{co}}^*(\delta(Y))$ (: the weak*-closed convex hull of $\delta(Y)$), $M_1(Y)$ $(= B(C(Y)^*)) = \overline{\mathrm{aco}}^*(\delta(Y))$ (: the weak*-closed absolutely convex hull of $\delta(Y)$) である。

さて、Y の次のタイプの fragmentability に注目しよう。

定義 1 (H-fragmentability of Y). $\varepsilon > 0$ とする。そのとき、Y が (H,ε)-*fragmentable* であるとは、次の性質 $(*)$ を持つことをいう。

$(*)$ Y の任意の空でない閉集合 M について、$\exists G$: 開集合 s.t. $M \cap G \neq \emptyset$ and $\mathrm{diam}_H(M \cap G)$ $(= \sup\{|f(y_1) - f(y_2)| : y_1, y_2 \in M \cap G, f \in H\}) < \varepsilon$.

Y が *H-fragmentable* とは、任意の正数 ε について、(H,ε)-fragmentable であることをいう。

容易に知られるように、この概念は X^* の H-fragmented 集合に対応しており、[Y : H-fragmentable $\Leftrightarrow \delta(Y)$: H-fragmented] である。それは、写像 $\delta : Y \to (\delta(Y), \sigma(C(Y)^*, C(Y)))$ が位相同形写像であることから示される。また、 特に H が、Y の任意の二点を分離している場合 (即ち、$\forall y_1, y_2 \in Y$ s.t. $y_1 \neq y_2$ について、 $\exists f \in H$ s.t. $f(y_1) \neq f(y_2)$) には、Namioka [11] の結果から、 このような性質を持つ Y は、Radon-Nikodym compact であることが判る。

次に H-fragmentable space Y の凸解析的性質を得るために必要な概念を定義しよう。

定義 2. $u : X \to \mathbf{R}$, を連続凸関数とする。そのとき、

(1) u の subdifferential (∂u と表記) とは、 X から X^* の、次で定義される集合値写像である。

$$\partial u(x) = \{x^* \in X^* : u(z) - k(x) \geq (z - x, x^*), \forall z \in X\}.$$

(2) u が点 x $(\in X)$ で *Gateaux differentiable* (ガトー微分可能) であるとは、$\forall y \in X$ について

$$\lim_{t \to 0} \{u(x + ty) - u(x)\}/t \ (= Du(x,y) \text{ と表記})$$

が存在することをいう。即ち、$\partial u(x)$ が singleton であることをいう。

(3) u が点 x $(\in X)$ で *A-differentiable* であるとは、次の性質を満たす

$x^* \in X^*$ が存在することをいう。

$$\lim_{t\to 0+}\{\sup_{y\in A}|(u(x+ty)-u(x))/t-(y,x^*)|\}=0.$$

明らかに、$B(X)$-differentiability は フレシェ微分可能性である。

(4) u が点 x $(\in X)$ で *A-uniformly Gateaux differentiable* であるとは、$Du(x,y)$ が y $(\in A)$ について一様に存在することをいう。
明らかに、$B(X)$-uniform Gateaux differentiability は、フレシェ微分可能性である。

さらに、$C(Y)$ 上で定義される特殊な連続凸関数に注目しよう。このような凸関数に注目できたのは、我々の論文 ([6], [7] 等) の結果に示唆されたからである。このような凸関数を利用しての H-fragmentability の特徴付けが、この報告の主要な目的である。

定義 3. Z は Y の空でない部分集合とする。そのとき、Z に対応して、$\phi_Z : C(Y) \to \mathbf{R}$ を、次で定義する。

$$\phi_Z(g)=\sup_{y\in Z} g(y)\ (\forall g\in C(Y)).$$

そのとき、ϕ_Z についての次の性質 (a), (b), (c) は容易に示される。

(a) $\phi_Z : C(Y)\to\mathbf{R}$ は正斉次、劣加法的 (よって、凸) 関数である。

(b) $|\phi_Z(g_1)-\phi_Z(g_2)|\le \| g_1-g_2 \|$ $(\forall g_1, g_2\in C(Y))$. (よって、$\phi_Z$ は連続関数である)

(c) $\partial\phi_Z(g)\subset M_1^+(Y)$ $(=\overline{\mathrm{co}}^*(\delta(Y)))$ $(\forall g\in C(Y))$.
例えば、(他は明らかより) (c) を注意しよう。任意に $L\in\partial\phi_Z(g)$ をとれ。そのとき、subdifferential の定義から $\phi_Z(f+g)-\phi_Z(g)\ge L(f)$ $(\forall f\in C(Y))$ が成り立つ。従って、$\phi_Z(f)\ge L(f)$ $(\forall f\in C(Y))$ であり、

$$\sup_{y\in Z} f(y)\ge L(f)\ (\forall f\in C(Y))$$

が成り立つ。よって、f を適当に選ぶことにより、L は非負値で $L(1)=1$ が得られ、$L\in M_1^+(Y)$ を得る。

そのとき、H-fragmentability の凸解析的特徴付けとして、次の結果を得る。

定理. Y : コンパクトハウスドルフ空間とし、H : $C(Y)$ の有界集合とするとき、次の各陳述は同値である。

(a) Y is H-fragmentable.

(b) $\forall$ continuous convex function $\phi : C(Y)\to\mathbf{R}$ に対して、$\exists$ dense G_δ-subset U of $C(Y)$ s.t. ϕ is aco(H) (absolutely convex hull of H)-differentiable at each $g\in U$.

(c) $\forall$ sequence $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset H$, $\forall Z$: nonempty subset of Y に対して、$\exists g \in C(Y)$ s.t. ϕ_Z is Ψ-uniformly Gateaux differentiable at g, where $\Psi = \{f_n : n \geq 1\}$.

この定理において示される各陳述の同値性において、(c) $\Rightarrow$ (a) が強調されるべき部分であり、この形での特徴付けが可能になったのは、我々が同種の一連の研究で採ってきた以下の論法が、この場合も利用できるからである。即ち、我々の論法は、

(1) 非 H-fragmentable 空間 Y に対応して、或る関数 $h : I\ (= [0,1]) \to Y$ が構成されること、

(2) この具体的関数 h の性質を調べる、

という二点であり、これにより、このような集合の直接的解析が可能となるのであるが、ここではその凸解析的性質である前述の定理を紹介する。実際、関数 $h : I \to Y$ は、次の凸解析的性質を持った関数であることが示される。

$(*)$ 適当な $\Psi = \{g_n : n \geq 1\}$ について、ϕ_Z は nowhere Ψ-uniformly Gateaux differentiable in $C(Y)$ である。但し、$Z = h(I)$.

このように、Y-値関数 h (本報告では、generalized Sierpinski function と命名) は本定理において重要な役割を持つので、§2 でその定義及び存在に関する事柄について注意する。

2 Sierpinski 関数の一般化

先ず、我々が、所謂 "Sierpinski function" の一般化と考える関数の定義から与えよう。

定義 4 (Generalized Sierpinski functions). T, S はコンパクトハウスドルフ空間、k は T から S への連続全射、ν は S 上のラドン確率測度とする。そのとき、$h : S \to T$ が次の性質を満たすならば、h は (k, ν) に対応する generalized Sierpinski function という。

(1) 関数 h は $\mathcal{B}(S)$-$\mathcal{B}(T)$ 可測関数 s.t. $h(\nu)$ (the image measure of ν by h) は、T 上のラドン確率測度である。但し、$\mathcal{B}(S)$ (resp. $\mathcal{B}(T)$) は、S (resp. T) のボレル σ-algebra を表す。

(2) $k(h(\nu)) = \nu$,

(3) $f(h(k(t))) = f(t)$ ($h(\nu)$-a.e.) for each $f \in C(T)$.

注意. もし T がコンパクト距離付け可能空間ならば、$C(T)$ は可分であるから、定義 4 の条件 (3) は次の条件 $(*)$ によって置き換えられる。

$(*)$ $h(k(t)) = t$ ($h(\nu)$-a.e.)

ここで、"Sierpinski function" として知られる関数を、我々の形式の中で眺めてみよう。T を Cantor 空間 $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$, S を I, λ を I 上のルベーグ測度とする。そして、$r_n : I \to \mathbf{R}$ は、n-th Rademacher 関数、$k : \{0,1\}^{\mathbf{N}} \to I$ は次で定義される関数とする。

$$k(\{t_n\}_{n\geq 1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{2^n} \ (\forall t = \{t_n\}_{n\geq 1} \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}).$$

そのとき、k は連続全射であり、次で定義される関数 (所謂 Sierpinski function) $h : I \to \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ を考えれば、h は下記の性質 (1), (2), (3) をもつことが知られている。

$$h(s) = \{(1 - r_n(s))/2\}_{n\geq 1} \ (\forall s \in I).$$

(1) h は $\mathcal{B}(I)$-$\mathcal{B}(\{0,1\}^{\mathbf{N}})$ 可測関数s.t. $h(\lambda)$ is the nomalized Haar measure on $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$,

(2) $k(h(\lambda))) = \lambda$,

(3) $h(k(t)) = t$ ($h(\lambda)$-a.e.)

従って、Sierpinski function h は (k, λ) に対応する generalized Sierpinski function であると看做される。

さて、先ず generalized Sierpinski functions の存在に関する次の命題を与えよう。

命題 1. T, S をコンパクトハウスドルフ空間、k を T から S への連続全射、ν を S 上のラドン確率測度とする。そのとき、この対 (k, ν) に対応する generalized Sierpinski function h が存在する。

(証) ここで紹介する議論は、[4] (or [5]) での展開とほぼ同じであるから、概略を述べる。(S, Σ_ν, ν) を $(S, \mathcal{B}(S), \nu)$ の完備化とせよ。そのとき、良く知られた結果 (cf. Proposition B.1 in [1]) により、次のような T 上のラドン確率測度 μ が存在する。

$$k(\mu) = \nu, \ L_1(T, \Sigma_\mu, \mu) = \{g \circ k : g \in L_1(S, \Sigma_\nu, \nu)\}.$$

但し、(T, Σ_μ, μ) は $(T, \mathcal{B}(T), \mu)$ の完備化である。そのとき、線形写像 $V : L_1(S, \Sigma_\nu, \nu) \to L_1(T, \Sigma_\mu, \mu)$ を $V(g) = g \circ k$ ($\forall g \in L_1(S, \Sigma_\nu, \nu)$) で定義すれば、$V$ は次の二つの性質を満たす等距離同形な全射である。

$$V^*(f)(k(t)) = f(t) \ (\mu - \text{a.e.}) \ (\forall f \in L_\infty(T, \Sigma_\mu, \mu)),$$

and

$$V^*(f_1 \cdot f_2) = V^*(f_1) \cdot V^*(f_2) \ (\text{in } L_\infty(S, \Sigma_\nu, \nu)) \ (\forall f_1, f_2 \in L_\infty(T, \Sigma_\nu, \nu)).$$

但し、V^* : dual operator of V.

さて、l を $L_\infty(S,\Sigma_\nu,\nu)$ 上のリフティングとせよ。そのとき、各 $s\in S$ 毎に $C(T)$ 上の 有界線形汎関数 L_s を $L_s(f)=l(V^*(f))(s)$ $(\forall f\in C(T))$ で定義すれば、前述の V^* の性質で、L_s は multiplicative であるから、次の性質を満たす関数 $h:S\to T$ の存在することが判る。

$$f(h(s)))=l(V^*(f))(s)\ (\forall f\in C(T),\forall s\in S).$$

それ故、 $l(f\circ h)=f\circ h$ $(\forall f\in C(T))$ が成り立つ。従って、リフティング理論により、h は $\mathcal{B}(S)$-$\mathcal{B}(T)$ 可測であり、$h(\nu)$ はラドン確率測度であることが判る。その上、 $f(h(s))=V^*(f)(s)$ (ν-a.e.) $(\forall f\in C(T))$ であるから、 $k(\mu)=\nu$ 及び $V^*(f)(k(t))=f(t)$ (μ-a.e.) $(\forall f\in C(T))$ と結合すれば、$f(h(k(t)))=f(t)$ (μ-a.e.) $(\forall f\in C(T))$ となる。従って、

$$\begin{aligned}\int_T f(t)d\mu(t) &= \int_T f(h(k(t)))d\mu(t)\\ &= \int_S f(h(s))dk(\mu)(s)=\int_S f(h(s))d\nu(s)\\ &= \int_T f(t)dh(\nu)(t)\ (\forall f\in C(T))\end{aligned}$$

が得られる。即ち、$\mu=h(\nu)$ である。以上から (k,ν) に対応する generalized Sierpinski function h の存在が示された。

ここで、generalized Sierpinski function の存在が保証される典型的な場合を述べよう。この状態が、後に注意するように、非 H-fragmentable コンパクト空間において生じるという意味からも重要である。一般にコンパクトハウスドルフ空間 Y において、Y の互いに素な集合の対の列 $(A_n,B_n)_{n\geq 1}$ が independent であるとは、$\forall m\geq 1$ と $\forall\{\varepsilon_j\}_{1\leq j\leq m}$ $(\varepsilon_j=1\mathrm{or}-1,\ 1\leq j\leq m)$ について $\bigcap_{1\leq j\leq m}\varepsilon_jA_j\neq\emptyset$ (但し、$\varepsilon_jA_j=A_j$ if $\varepsilon_j=1$, $\varepsilon_jA_j=B_j$ if $\varepsilon_j=-1$) であることをいう。

さて、Y に次の性質を満たす、空でない閉集合の系 $\{V(n,i):n=0,1,\dots;\ i=0,\dots,2^n-1\}$ が存在するとしよう。

$$V(n+1,2i)\cup V(n+1,2i+1)\subset V(n,i),$$

and

$$V(n+1,2i)\cap V(n+1,2i+1)=\emptyset$$

$(n=0,1,\dots$ and $i=0,\dots,2^n-1)$.
そのとき、$A_n=\bigcup\{V(n,2i+1):0\leq i\leq 2^{n-1}-1\}$, $B_n=\bigcup\{V(n,2i):0\leq i\leq 2^{n-1}-1\}$ とおけば、$(A_n,B_n)_{n\geq 1}$ は independent である。従って、$T=\bigcap(A_n\cup B_n)$ は Y の空でないコンパクト集合である。

そして、$\psi : T \to \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ を $\psi(t) = \{x_n\}_{n\geq 1}$ (但し、$x_n = 1$ if $t \in A_n$ and $x_n = 0$ if $t \in B_n$) で定義すれば、ψ は連続全射である。さらに、$\tau : \{0,1\}^{\mathbf{N}} \to I$ を、$\tau(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n/2^n$ ($\forall x = \{x_n\}_{n\geq 1} \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$) と定義すれば τ は 連続全射である。そして、$k = \tau \circ \psi : T \to I$ とせよ。そのとき、命題 1 から、この (k, λ) に対応する generalized Sierpinski function h $(: I \to T)$ を得る。$\mu = h(\lambda)$ とすれば、次の性質 (a), (b), (c) が成り立つ。但し、l は $L_\infty(I, \Lambda, \lambda)$ 上のリフティングである。

(a) $l(f \circ h) = f \circ h$ $(\forall f \in C(T))$,

(b) $\tau(\psi(\mu)) = \lambda$,

and

(c) $\displaystyle\int_{\psi^{-1}(\tau^{-1}(E))} f(y)d\mu(y) = \int_E f(h(s))d\lambda(s)$ $(\forall E \in \mathcal{B}(Y), \forall f \in C(Y))$.

3 非 H-fragmentable 空間と、一般化された Sierpinski 関数

さて H-fragmentable コンパクト空間を解析するための基本的命題として、次を提出しよう。ここでは、その凸解析的性質に着目して紹介するが、[8] の Theorem 2 で述べられているように、この命題において、実に種々の性質が示される。しかも、この命題は将に [7] の Proposition 5 の A-fragmented 集合の凸解析的性質に関する部分の complete analogue であり、証明も全く同様の展開 (即ち、Generalized Sierpinski function の構成を通じて行う) で得られることに注意しよう。

命題 2. Y をコンパクトハウスドルフ空間、H を $C(Y)$ の有界集合とする。もし Y が H-fragmentable でないならば、次の陳述 (i), (ii) を得る。

(i) 或る正数 ε, H の関数の系 $\{f_{n,j} : n = 0, 1, \ldots ; j = 0, \ldots, 2^n - 1\}$ 及び Y の空でない閉集合の系 $\{V(n,j) : n = 0, 1, \ldots : j = 0, \ldots, 2^n - 1\}$ が存在して、次の (1), (2) が成り立つ。

(1) $V(n+1, 2j) \cup V(n+1, 2j+1) \subset V(n,j)$,

(2) $\forall v \in V(n+1, 2j), \forall w \in V(n+1, 2j+1)$ について、$f_{n,j}(v) - f_{n,j}(w) \geq \varepsilon$ $(\forall n \geq 0,\ 0 \leq \forall j \leq 2^n - 1)$.

(ii) 陳述 (i) の故に、次の性質 (P) を持った関数 $h : I \to Y$ が存在する。

(P) $h(I) = Z$ とすれば、ϕ_Z は nowhere Ψ-uniformly Gateaux differentiable in $C(Y)$ である。

但し、 $g_n = f_{m,j}$ (if $n = 2^m + j, m \geq 0, 0 \leq j \leq 2^m - 1$) と定め、$\Psi = \{g_n : n \geq 1\}$ とする。

(証) 陳述 (1) は、[12] の Proposition 5.6 の証明と同様の議論を展開すれ

ば、得られる。注意すべきは 陳述 (2) の証明である。そのために、(1) で得られた閉集合の系 $\{V(n,j) : n = 0,1,\ldots; j = 0,\ldots,2^n - 1\}$ を用いて、

$$A_n = \bigcup_{j=0}^{2^n-1} V(n,2j+1),\ B_n = \bigcup_{j=0}^{2^n-1} V(n,2j)$$

とする。そのとき、$(A_n, B_n)_{n\geq 1}$ は Y の閉集合の対の作る independent sequence である。従って、この列に対応して、上述のように構成される Generalized Sierpinski function h について、$h(\lambda)$ ($= \mu$ と記す) : Radon probability measure on Y であり、

(*) $l(f \circ h) = f \circ h$ $(\forall f \in C(Y))$. 但し、l は $L_\infty(I,\Lambda,\lambda)$ 上のリフティングである。又、

(**) $\displaystyle\int_E f(h(s))d\lambda(s) = \int_{\psi^{-1}(\tau^{-1}(E))} f(y)d\mu(y)$ $(\forall E \in \mathcal{B}(Y), \forall f \in C(Y))$
が成り立つ。さらに、

(* * *) $\psi^{-1}(\tau^{-1}(I(n,2j))) \subset V(n,2j)$, $\psi^{-1}(\tau^{-1}(I(n,2j+1)))$
$\subset V(n,2j+1)$ $(j = 0,1,\ldots,2^{n-1}-1)$
である。但し、$I(n,i) = (i/2^n,(i+1)/2^n)$ $(n \geq 0, 0 \leq i \leq 2^n - 1)$ である。

さて、$\forall g \in C(Y)$ をとれ。又、$T_h : C(Y) \to L_1(I,\Lambda,\lambda)$ を $T_h(f) = f \circ h$ $(\forall f \in C(Y))$ で定義する。そのとき、$\lambda(E) > 0$ なる E について、

$$(T_h^*(\chi_E/\lambda(E)), f) = \left(\int_E f(h(s))d\lambda(s)\right)/\lambda(E)\ (\forall f \in C(Y))$$

であるから、これから容易に、$T_h^*(\chi_E/\lambda(E)) \in M_1^+(Y)$ が判る。そして、$M = \overline{\mathrm{co}}^*(T_h^*(\Delta(I)))$ $(\subset M_1^+(Y))$ (但し、$\Delta(I) = \{\chi_E/\lambda(E) : \lambda(E) > 0\}$) とし、$M$ のスライスの族 $\{S(g,\varepsilon/3n,M) : n \geq 1\}$ を考えよう。そのとき、前述の h の性質 (*) を用いて、$\forall n \geq 1$ について

$$\begin{aligned}
S(g,\varepsilon/3n,M) &= \{\mu \in M : \int_I g(s)d\mu(s) > \sup_{\nu\in M}\int_I g(s)d\nu(s) - \varepsilon/3n\} \\
&= \{\mu \in M : \int_I g(s)d\mu(s) > \text{ess-}\sup_{s\in I} g(h(s)) - \varepsilon/3n\} \\
&= \{\mu \in M : \int_I g(s)d\mu(s) > \sup_{s\in I} g(h(s)) - \varepsilon/3n\} \\
&= \{\mu \in M : \int_I g(s)d\mu(s) > \phi_Z(g) - \varepsilon/3n\}
\end{aligned}$$

を得る。従って、$E_n = \{s \in I : g(h(s)) > \phi_Z(g) - \varepsilon/3n\}$ とすれば、$\lambda(E_n) > 0$ 及び $\delta(h(E_n)) \subset S(g,\varepsilon/3n,M)$ である。そのとき、[6] 等で用いられた論法により、自然数の真の増加列 $\{p_n\}_{n\geq 1}$ と非負整数の列 $\{i_n\}_{n\geq 1}$ で、任意の n について $0 \leq 2\cdot i_n < 2^{p_n} - 1$, $\lambda(E_n \cap I(p_n, 2\cdot i_n)) > 0$, $\lambda(E_n \cap I(p_n, 2\cdot i_n + 1)) > 0$ が満たすものが存在する。$F_n = E_n \cap I(p_n, 2\cdot i_n)$, $G_n = E_n \cap I(p_n, 2\cdot i_n + 1)$ として、$\alpha_n = T_h^*(\chi_{F_n}/\lambda(F_n))$, $\beta_n = T_h^*(\chi_{G_n}/\lambda(G_n))$ とおく。そのとき、$\alpha_n, \beta_n \in M_1^+(Y)$ $(\forall n)$ であり、次が成り立つ。

(a) $\int_I g(s)d\alpha_n(s) > \phi_Z(g) - \varepsilon/3n$, $\int_I g(s)d\beta_n(s) > \phi_Z(g) - \varepsilon/3n$,

(b) $\int_I k_n(s)d\alpha_n(s) - \int_I k_n(s)d\beta_n(s) \geq \varepsilon$ (Here $k_n = f_{p_n-1,i_n}$, and so, $\{k_n\}_{n\geq 1}$ is a subsequence of $\{g_n\}_{n\geq 1}$),

(c) $\phi_Z(g + k_n/n) \geq \int_I (g(s) + k_n(s)/n)d\alpha_n(s)$ 及び、

$\phi_Z(g - k_n/n) \geq \int_I (g(s) - k_n(s)/n)d\beta_n(s)$.

例えば、(a), (b) について確かめよう。(c) についても同様である。

(a) について。$\delta(h(F_n)) \subset S(g, \varepsilon/3n, M)$ であるから

$$\begin{aligned}\int_I g(s)d\alpha_n(s) &= \left(\int_{F_n} g(h(s))d\lambda(s)\right)/\lambda(F_n) \\ &> \phi_Z(g) - \varepsilon/3n\end{aligned}$$

を得る。もう一方も同様である。

(b) について。

$$\begin{aligned}\int_I k_n(s)d\alpha_n(s) &- \int_I k_n d\beta_n(s) \\ &= \left(\int_{F_n} f_{p_n-1,i_n}(h(s))d\lambda(s)\right)/\lambda(F_n) \\ &\quad - \left(\int_{G_n} f_{p_n-1,i_n}(h(s))d\lambda(s)\right)/\lambda(G_n) \\ &= \left(\int_{\psi^{-1}(\tau^{-1}(F_n))} f_{p_n-1,i_n}(y)d\mu(y)\right)/\lambda(F_n) \\ &\quad - \left(\int_{\psi^{-1}(\tau^{-1}(G_n))} f_{p_n-1,i_n}(y)d\mu(y)\right)/\lambda(G_n) \\ &\geq \varepsilon.\end{aligned}$$

ここで、前述の h の性質 (**) や、性質 (* * *) 及び $f_{n,j}$ の性質 (i) (2) を利用している。これらの性質 (a), (b), (c) から

$$\begin{aligned}\phi_Z(g + k_n/n) &+ \phi_Z(g - k_n/n) - 2\cdot\phi_Z(g) \\ &> \int_I (g(s) + k_n(s)/n)d\alpha_n(s) + \int_I (g(s) - k_n(s)/n)d\beta_n(s) \\ &\quad - \left(\int_I g(s)d\alpha_n(s) + \int_I g(s)d\beta_n(s) + 2\varepsilon/3n\right) \\ &= \left(\int_I k_n(s)d\alpha_n(s) - \int_I k_n d\beta_n(s)\right)/n - 2\varepsilon/3n \\ &\geq \varepsilon/3n\end{aligned}$$

を得る。即ち、$\{\phi_Z(g + k_n/n) + \phi_Z(g - k_n/n) - 2\cdot\phi_Z(g)\}/(1/n) > \varepsilon/3$ が得られ、ϕ_Z は g で Ψ-uniformly Gateaux differentiable でないことが判る。g は任意であるから、証明は完了する。

4 定理の証と、その系

(a) ⇒ (b). 先に注意したように、(a) は、$\delta(Y)$ が H-Radon-Nikodym 集合 (即ち、H-fragmented 集合) であることを意味するから、[6] の Proposition 5 と同様の議論で、$M_1(Y)$ ($=\overline{\mathrm{aco}}^*(\delta(Y))$) も又、$H$-Radon-Nikodym 集合である。従って、$M_1(Y)$ の任意の弱* コンパクト凸集合は、H-weak*-dentable である。よって、[2] の議論 (cf. Theorem 3.14 and Proposition 3.15) により、ϕ は $C(Y)$ の 或る dense G_δ 集合 U の各点 g において、aco(H)-differentiable が判る。

(b) ⇒ (c). 前述したように、 ϕ_Z は連続凸関数であるから、(b) ⇒ (c) が即得られる。

(c) ⇒ (a). 命題 2 から生じる。

定義 3. X が Asplund 空間とは、∀ continuous convex function $\phi : X \to \mathbf{R}$ が、X の或る dense G_δ 集合上で Frechet differentiable (フレシェ微分可能) であることをいう。

以下の系 1, 系 2 では H が Y の任意の二点を分離する有界集合である場合を扱う。そのとき、前述したように Radon-Nikodym compact 空間の特徴付けから [Y : Radon-Nikodym compact ⇔ Y : H-fragmentable] が判るから、次の系を得る。

系 1. Y は Radon-Nikodym compact ⇔ 次の性質 (∗) を満たす H が存在する。

(∗) $\forall \{f_n\}_{n\geq 1} \subset H$, ∀ nonempty subset Z of Y, ϕ_Z is Φ-uniformly Gateaux differentiable at some point g of $C(Y)$, where $\Phi = \{f_n : n \geq 1\}$.

特に、 $H = B(C(Y))$ (: $C(Y)$ の閉単位球) とすれば、[Y : $B(C(Y))$-fragmentable ⇔ Y : scattered (that is, every nonempty subset of Y has an isolated point)] が容易に判るから、次を得る。

系 2. 次の各陳述は同値である。

(a) Y は $B(C(Y))$-fragmentable である。

(b) $C(Y)$ は Asplund 空間である。

(c) ∀ nonempty subset Z of Y, ϕ_Z is Frechet differentiable on a dense G_δ-subset of $C(Y)$.

(d) Y は scattered である。

注意. 定理の証明の中でも利用したように、[Y : H-fragmentable ⇔ $\delta(Y)$: H-Radon-Nikodym 集合 (即ち、 H-fragmented 集合)] であるから、H-

fragmentability of Y の解析は、[10] で展開されたように H-Radon-Nikodym 集合 $\delta(Y)$ の解析を経由 (即ち、H-Radon-Nikodym 集合 $\delta(Y)$ の結果の利用) しても可能であることは明らかであり、自然であろうとも思われるが、この報告では、考察の対象とする事柄に応じて、少しく直接的な論理展開を与えていることが特徴といえる。

参考文献

[1] D. Van Dulst, Characterizations of Banach spaces not containing l_1, CWI Tract, **59**, Amsterdam, 1989.

[2] S. P. Fitzpatrick, Separably related sets and the Radon-Nikodym property, Illinois J. Math. **29** (1985), 229-247.

[3] J. E. Jayne, I. Namioka and C. A. Rogers, Norm fragmented weak* compact sets, Collect. Math. **41** (1990), 133-163.

[4] M. Matsuda, A characterization of Pettis sets in dual Banach spaces, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **27** (1991), 827-836.

[5] M. Matsuda, On localized weak precompactness in Banach spaces, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **32** (1996), 473-491.

[6] M. Matsuda, A generalization of the Radon-Nikodym property in dual Banach spaces, fragmentedness, and differentiability of convex functions, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **35** (1999), 921-933.

[7] M. Matsuda, An approach to generalized Radon-Nikodym sets and generalized Pettis sets, Hiroshima Math. J. **31** (2001), 71-97.

[8] M. Matsuda, Generalized Sierpinski functions and fragmentable compact spaces, Rep. Fac. Sci. Shizuoka Univ. **35** (2001), 7-15.

[9] M. Matsuda, Remarks on generalized fragmented sets in dual Banach spaces, Far East J. Math. Sci. Special Vol. Part 1 (2001), 81-90.

[10] M. Matsuda, Fragmentable compact spaces and differentiability of convex functions, Far East J. Math. Sci. **5** (2002), 89-95.

[11] I. Namioka, Radon-Nikodym compact spaces and fragmentability, Mathematika, **34** (1987), 258-281.

[12] R. R. Phelps, Convex functions, monotone operators and differentiability, Lecture Notes in Math. **1364** (1989), Springer.

[13] O. I. Reynov, On a class of Hausdorff compacts and GSG Banach spaces, Studia Math. **71** (1981), 113-126.